# 第十章：非寿险定价基础

**学习目标：**

1. 掌握非寿险定价的相关概念
2. 理解分类费率厘定的基本原理
3. 理解广义线性模型的基本思想
4. 理解经验费率厘定的基本原理
5. 掌握信度模型的计算方法

非寿险定价是非寿险精算教学内容的重要组成部分，主要包括分类费率厘定和经验费率厘定两部分内容。分类费率厘定是根据保单已知的风险特征信息进行风险类别划分，从而计算得到每个风险类别的平均费率。目前，分类费率厘定通常使用的是广义线性模型。经验费率厘定是根据被保险人的历史索赔数据预测未来保险成本或者对保单的预期保费进行调整，其中最为重要的模型是1978年Bühmann提出的信度模型，它是现代非寿险精算学的基础。本章主要介绍两种定价方法的基本思想，有助于理解非寿险产品定价的基本原理。

## 10. 1 费率厘定基础

在非寿险定价中，有一些基本概念十分重要，例如风险单位、赔款、保费和费用等。它们是非寿险定价的基本元素。为了便于理解和应用非寿险定价的理论和方法，本节首先对这些基本概念进行解释。

### 10.1.1 风险基础和风险单位

当被保险人将其潜在损失转移给保险人时，保险人需要收取保险费。保险费应该与保单持有人的潜在损失成比例。而度量潜在损失大小的一个基本工具就是风险基础（exposure base），它近似量化了风险的大小。因此，风险基础也就是保费基础（premium base），它的大小决定着保费的高低。

真实的风险是十分复杂的，同时也在不断变化之中。为了计算保费，保险人必须选择一个近似度量风险大小的基础，这就是风险基础。风险基础也称之为风险单位（exposure，unit of exposure），它是对风险进行度量的基本单位，也是非寿险费率厘定的基本单位。不同险种有不同的风险单位。 如车险、团体意外伤害险、劳工补偿保险的风险单位都是不一样的。描述了风险基础的总体规模的指标是风险单位数（exposures, number of exposures），有时也称作风险基础（exposure base）、风险规模或风险暴露。

例如，再汽车保险中，风险单位通常被确定为“车年”，为1辆车提供1年的保险，风险单位数为1个车年；为5辆汽车提供半年的保险，风险单位数为2.5个车年。

风险单位数的统计指标包含三种：承保风险(written exposures)、到期风险(earned exposures)和有效风险 (in-force exposures)。承保风险在一定时期内保险人已经签订了保险合同的风险单位数。到期风险是在一定时期内保险人实际承担了保险责任的风险单位数。有效风险是在某一时点上保险人正在承担保险责任的风险单位数。

**例：**下面有4份保险期限均为12个月的保险单，保单生效日期不同，请计算每份保单的在不同时间段（时间节点）上的承保风险、到期风险和有效风险。

表 1 风险单位数统计量的比较

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **生效日期** | **承保风险** | | | **到期风险** | | **有效风险** |
| **2002** | **2003** | **2002** | | **2003** | **2003/1/1** |
| 2002/1/1 | 1 | 0 | 1 | | 0 | 0 |
| 2002/4/1 | 1 | 0 | 0.75 | | 0.25 | 1 |
| 2002/7/1 | 1 | 0 | 0.5 | | 0.5 | 1 |
| 2002/10/1 | 1 | 0 | 0.25 | | 0.75 | 1 |
| 合计 | 4 | 0 | 2.5 | | 1.5 | 3 |

保险公司在非寿险精算定价时候应该选择合理的风险单位，需要满足下述3点。 第一，风险单位应该是对潜在损失准确度量，应与潜在损失有直接的相关关系。同时，风险单位对潜在损失的变化具有足够的敏感性。如在劳工补偿保险中，工资水平比雇员人数更好。第二，风险单位是可以测量。例如，在产品责任保险中，最理想的风险单位是正在使用中的每个产品，但通常用已售产品作为风险单位。第三，保险公司的风险单位不应该轻易改变，因为可能使以往的历史经验数据无法使用。

### 10.1.2 赔款

保险索赔（claim）是指保险事故发生后，由索赔人（claimant）根据保险合同的规定向保险人提出的赔付请求。索赔通常分为两类，一类是索赔的次数，二类是索赔的金额。

保单索赔的次数通常用索赔频率来表示。索赔频率定义为在一定时期内（通常为一年）平均每个风险单位的索赔次数，通常用总索赔次数和风险单位数之比进行估计：



**例：**一个汽车保单组合在 2014 年有 5000 个车年的风险单位数，该年发生的索赔次数为 800 次， 那么在该年平均每个车年的索赔频率估计值为 800/5000 = 16%一份汽车保险单在 5 年内发生了 6 次索赔，那么这份保单的索赔频率估计值为 6/5 = 1.2 次，即每年发生 1.2 次索赔。

保单索赔的金额通常用赔款或损失来表示。赔款是指保险人已付或应付给索赔人的金额，有时也被称作赔付额（claim amount, claim size）。赔款分为两部分，一部分是已付赔款（paid loss），是已经支付给索赔人的赔款金额，第二部分是未决赔款，是指损失已经发生，但由于时间上来不及处理或是由于对赔款的处理方法及给付数额等存在争议，没能结案，从而造成尚未支付的赔款，即

赔款 = 已付赔款 + 未决赔款

其中，未决赔款包含个案准备金 (case reserve)、已发生未完全报案赔款 (incurred but not enough reported, IBNER) 和已发生未报案赔款 (incurred but not reported, IBNR) 三部分。个案准备金是保险公司根据已经报案的事故而估计的在未来将要支付的赔款，已付赔款与个案准备金之和称之为已报案赔款（reported loss）或已发生赔款（reported loss），即

已报案赔款 = 已付赔款 + 个案准备金

未决赔款 = 个案准备金 + 已发生未完全报案赔款 + 已发生未报案赔款

已发生未完全报案赔款是指考虑到个案准备金可能存在不足而对个案准备金进行的调整。在精算实务中，已发生未完全报案赔款也可以作为已发生未报案赔款的一部分处理。最终赔款（ultimate loss）是指保险公司向索赔人最终需要支付的赔款，可以表示为：

最终赔款 = 已报案赔款 + 已发生未完全报案赔款 + 已发生未报案赔款

索赔强度 (Claim Severity) 是每个风险单位在平均每次索赔中的赔款。（通常用赔款总额与索赔次数之比进行估计）。



其中，索赔强度可以不包括理赔费用，也可以包括直接理赔费用。赔款可以是已付的、已报案的或预测的最终赔款。索赔次数也可以是已付的、已报案的或者预测的最终索赔次数。

### 10.1.3 承保费用和理赔费用

在保险业务的经营过程中，保险公司除了需要支付各种赔款之外，还会发生各种各样的费用，如承保费用和理赔费用。

承保费用包括代理人佣金、一般管理费用、广告费用和税金等。理赔费用是保险人在理赔和结案过程中发生的费用，可以分解为直接理赔费用和间接理赔费用。直接理赔费用(allocated loss adjustment expenses, ALAE)是与特定索赔直接相联系的费用。例如，特定索赔的堪察费用和辩护费用等。间接理赔费用(unallocated loss adjustment expenses, ULAE)：与特定索赔不直接相联系的费用。如理赔部门管理人员的薪资、办公费用、数据处理费用。在厘定保险费率时，通常将直接理赔费用与赔款放在一起作为一个整体来处理，将直接理赔费用表示为赔款的一定比例。

### 10.1.4 保费

保费（premium）是投保人购买保险产品时向保险人所支付的价格。非寿险产品的保费由纯保费、风险附加、费用附加和利润附加构成。纯保费用于补偿保险公司的期望赔款支出；风险附加用于支付实际损失中，超过纯保费的不利偏差所导致的额外赔款支出；费用附加用于支付保险公司的经营管理费用；利润附加是对保险业务占用资本金的一种合理补偿。纯保费与风险附加之和称为风险保费。保险公司通常按照保费费率进行产品定价。保险费率（premium rate）简称费率，是指每一个风险单位的保费。

纯保费率是指每一风险单位的平均赔款，表示为



其中，**表示纯保费， ** 表示赔款，** 表示风险单位数。

纯保费率还可以写成索赔频率与索赔强度的乘积，表示为：



其中，为索赔次数 ， 为索赔频率，为索赔强度。

因此，非寿险产品定价首选需要对保险产品的纯保费进行预测。纯保费的预测可以直接根据保险产品纯保费的观测值进行预测，也可以分别预测索赔频率和索赔强度，将两者的结果相乘得到纯保费的预测值。在厘定合理的纯保费之后，再对相应的风险附加、费用附加和利润附加进行预测。

## 10. 2 分类费率定价

### 10.2.1 风险分类的原理

保险产品的保费不仅跟风险基础有关，还跟保单的个体风险特征有关。保险公司在同一个保险产品对于不同的投保人收取的保费是不一样的。因此，保险公司需要根据被保险人个体风险的特征进行分类，在分类的基础上厘定各个风险类别的费率。风险分类的原理是将具有相同期望损失成本的保单归为一类，而后去厘定其费率。风险完全相同的保单几乎是不存在的，即使存在，也不可能或难以将它们区分开来，风险分类只是将风险近似相同的保单划分在同一个类别里。

保险公司进行风险分类主要根据保单的个体风险特征信息，其中某些保单的风险特征信息可以作为费率因子使用。费率因子是影响保险费率的各种因素，保险公司可以根据费率因子将保单划分为不同的风险等级，对不同的风险等级收取相应的保费。例如，汽车保险的费率因子通常包括与被保险人风险特征相关的费率因子，如驾驶员的年龄、驾驶员的性别、驾驶员的婚姻状况、驾驶员以前的驾驶纪录、每年行驶的里程数，以及与被保险车辆风险特征相关的费率因子，如汽车的主要用途、汽车的品牌和款式、汽车的使用年数和汽车的停放地点。

保险公司对个体保单进行风险分类的原因在于：（1）如果对于个体保单进行分析，保险自身风险自身损失经验有限，数据可信度不高；（2）若把具有相似风险特征的保单进行汇总合并之后，可以提高经验数据的可靠性。

根据费率因子的不同组合，保险公司可以构建费率手册（ratemaking manual）。费率手册是保险公司对风险进行分类并计算其保费的一种文件。其主要的内容是费率表（rating tables）。费率手册通常使用的相对费率。相对费率是根据各个风险类别的费率与基础费率的相对关系所确定的一种费率，其中基础费率是一个特定类别的费率，通常是根据最常见的风险特征划分的。因此。风险类别的费率都是在基准费率下进行计算的。

表 2和表 3显示了根据汽车保险根据两种费率因子划分的风险类别下的相对费率，其中车险A和地区甲是基础费率。若基础费率＝200，那么属于车型B，行驶地区为乙的相对费率为，绝对费率为。

表 2 车型的相对费率

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 车型 | A | B | C | D |
| 相对费率 | 1 | 1.05 | 1.1 | 1.2 |

表 3 被保险车辆行驶地区的相对费率

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 地区 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
| 相对费率 | 1 | 0.9 | 1.2 | 1.4 |

保险公司使用分类费率的原因在于：（1）可以使费率的表现形式更加简洁。例如：被保险人根据地区（10个）和车型（10个）被分成100 个类别，如果给每个类别厘定纯保费，则需要制定 100个不同的费率。通过基础费率和相对费率的方式，只需确定1个基础费率和 20 个相对费率即可。在分类费率定价中，只需要预测2 个费率因子，这样简化了费率的表现形式。（2）由于个体保单的风险特征存在较为明显的差异，个体风险的经验数据的可信度达不到 100%，对同类风险的保单定价能够减低预测误差。另外，保险公司在使用分类费率定价时，需要注意的是应该确保分类结果应具有统计上的稳定性，且便于在现实的市场上进行操作。譬如：将 5000 份保单划分为 700 个风险类别是没有意义的，因为许多风险类别将是空集或者只包含少数几份保单。

保险公司在费率因子的选择上需要遵守以下原则：

从统计角度来看，保险公司的费率因子应该是分类变量，即是个体风险的一些基本风险特征，根据这些特征，可以将个体风险区分成若干个具有不同期望损失的风险类别。分类变量的不同取值称作水平（level），例如表 2和表 3中的车型和地区就是分类变量。另外，如果保单的风险特征是连续型变量时，如车辆购置价，被保险人年龄，驾龄等，保险公司需要对这些变量进行离散化处理，如根据车辆购置价的高低，分为高，中，低三类。

从精算角度来看，保险公司在分类变量的选择首先需要保证选择的费率因子要与保险成本相关，即费率因子能够准确体现保险成本的高低。同时，在进行风险分类时，需要确保同一风险类别的保单（被保险人）具有相同的期望损失，即满足风险同质性的特征。其次，同一风险类别应该包含数量足够多的保单，确保定价的可信性。最后，选择分类变量作为费率因子需要确保每组的风险类被下保单的保险成本差异并非由于随机波动所致。

从保险公司经营角度来看，作为费率因子的分类变量应该满足：（1）分类变量应该是可以客观定义的。例如，汽车保险中车型是一个常用的费率因子，而驾驶人反应敏捷、开车稳健虽然反映了保险成本和风险大小，但是不容易度量和客观定义。（2）分类变量应该是可以验证的，例如行驶里程数。（3）分类变量直观上应该与保险成本相关，例如车辆的颜色

不会导致悬殊的费率差异，不能作为费率因子。例如，驾驶人年龄与保险成本相关，通常作为常用的费率因子。（4）分类变量获取的费用应该控制在可以接受的范围之内。如果管理费用较高，就失去了风险分类的意义。

从社会层面来看，作为费率因子的分类变量应该满足：（1）保险公司应该保护个人隐私。例：收入、饮酒习惯通常不作为费率因子。（2）要与保险成本具有因果关系，投保人可以接受。例如，信用高的人可能风险较低，但是并不直接与保险成本具有因果关系，通常不作为费率因子。（3）选择的分类变量应该可以被被保险人控制。例如，是否安装车辆防盗装置可以作为费率因子。（4）还需要考虑社会民众的承受能力。例如，过多的车主不购买第三者责任保险，就会带来社会问题。另外，如果根据某个变量厘定的保费导致保费过高，使一部分被保险人无法支付，那么该分类变量就不应该作为费率因子。

费率因子的选择还应该遵守当地的法律。在汽车保险中，某些费率因子是被法律所禁止使用的。例，种族、宗教信仰、性别（在美国某些州会被视为歧视）等。

### 10.2.2 广义线性模型

在非寿险分类费率厘定中，最常使用的是广义线性模型(Generalized linear models, GLM)。从二十世纪末开始，广义线性模型在分类费率厘定中的应用得到迅速发展，在某些国家已经成为厘定分类费率的行业标准，尤其是在个人保险业务中，广义线性模型得到了精算师的广泛认可和接受。

运用广义线性模型可以预测索赔次数（索赔频率）、索赔金额（索赔强度）和保单的纯保费。广义线性模型是对线性回归模型的推广，主要体现在放宽了线性回归模型中正态分布的基本假设。假设随机变量表示保单的索赔次数（索赔频率）、索赔金额（索赔强度）或纯保费，在广义线性模型框架下假设随机变量（因变量）服从指数分布族，同时将因变量的拟合值表示为参数线性组合的一种函数，其中参数的线性组合用来表示分类费率定价中费率因子对因变量拟合值的影响。

假设保单组合中包含份保单，每份保单的索赔观测值表示为个相互独立的随机变量。运用广义线性模型进行定价时，假设随机变量服从均值的指数分布族，模型结构如下：



其中，函数是连接函数 (link function)。为协变量向量矩阵，对应第个观测值的个协变量（费率因子），为回归系数向量，其中表示截距项。表示模型的线性预测项。因变量的拟合值经过连接函数变换之后等于线性预测项。

连接函数为一个严格单调的函数，因此指数分布族的均值可以表示为



其中，表示连接函数的逆函数，也被称之为响应函数(response function)

非寿险精算中大多数损失分布都可以写成指数分布族的形式。指数分布族包含了风险模型中描述损失次数的的泊松分布、二项分布、负二项分布，描述损失金额的伽马分布和逆高斯分布。假设随机变量服从指数分布族，其概率密度函数表示为：



其中，和为已知函数，分别对应指数分布族中不同的具体分布。为自然函数(natural parameter)或者正则参数(canonical parameter)，为离散参数(dispersion parameter)，为已知的先验权重(weight)。另外，对于指数分布族的有些分布而言，离散参数等于1，例如正态分布和泊松分布，而有些分布的散度参数是需要估计的，例如伽马分布和逆高斯分布等。

指数分布族的均值和方差分别为





上式中，和分别为关于自然参数的一阶微分和二阶微分，同时也被称之为方差函数。指数分布族的方差与自然参数有关，同时自然参数也与均值有关，所以指数分布族的方差也均值有关。方差函数可以表示为均值的函数，即可以令，此时指数分布族的方差可以表示为



广义线性模型的结构主要分为以下三个部分：

1. 系统成分：与线性回归模型类似，广义线性模型的线性预测项仍然表示为。
2. 随机成分：随机变量服从指数分布族，指数分布族的方差随着均值的变化而变化。
3. 连接函数：广义线性模型的连接函数主要用于描述线性预测项与均值之间的关系，连接函数的具体形式见表 4。

表 4 连接函数具体形式

|  |  |
| --- | --- |
| 名称 | 具体形式 |
| 恒等 |  |
| 对数 |  |
| Logit |  |

在实际运用中，与线性回归模型不同之处在于，广义线性模型需要根据不同因变量的分布选择不同的以及不同的连接函数。只要分布确定，的具体形式就与分布形成一对一的确定关系。在非寿险定价中，连接函数通常选择对数连接函数，即



我们所熟悉的一些分布，如正态分布、泊松分布、二项分布、伽马分布和逆高斯分布。显示了主要的损失分布对应的指数分布族的参数和方差函数。

表 5 指数分布族参数和方差函数。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 损失分布 | 标准参数 | 离散参数 | 均值 | 方差函数 |
| 正态分布 |  |  |  | 1 |
| 泊松分布 |  | 1 |  |  |
| 二项分布 |  | 1 |  |  |
| 负二项分布 |  | 1 |  |  |
| 伽马分布 |  |  |  |  |

**例：**证明泊松分布属于指数分布族。

**解：**假设泊松分布的均值为，其概率函数可以写成指数分布族的形式：



若令，泊松分布可以表示为指数分布族的形式，其中



### 10.2.3 常用的广义线性模型

在广义线性模型中，因变量的方差是其均值的函数，这一特点非常适合于保险数据。譬如在拟合索赔金额时，如果使用传统的线性回归模型，假设误差项服从正态分布，那么当拟合值为 100 元时，标准误差为 10 元，而拟合值为 10000 元时，标准误差也为 10 元。但从直观上看，拟合值越大，其标准误差也可以越大。在广义线性模型中，如果假设因变量的变异系数为常数（如 10%），这就意味着假设误差项服从伽马分布，在这种情况下，当拟合值为 100 元时，标准误差为 10 元，而当拟合值为 10000 元时，标准误差为 1000 元。

在广义线性模型的应用中，根据保险数据的先验信息选择误差项的分布类型，可以有效改进模型的拟合效果。譬如，如果因变量的方差为常数，可以选择正态分布；如果因变量的方差等于其均值，可以选择泊松分布；如果因变量的方差等于其均值的平方，可以选择伽马分布；如果因变量的方差等于其均值的三次方，可以选择逆高斯分布。

在非寿险费率厘定中，通常需要估计索赔次数（索赔频率）、索赔金额（索赔强度）或保险事故发生的概率等，根据这些数据的特点，常用的广义线性模型分别是：

（1）在估计索赔次数或索赔频率时，常用的广义线性模型是泊松回归模型和负二项回归模型，即假设索赔次数服从泊松分布或负二项分布，使用对数连接函数。

（2）在估计索赔强度或者索赔金额时，常用的广义线性模型是伽马模型和逆高斯模型，即假设索赔强度服从伽马分布或逆高斯分布，使用对数连接函数。

（3）在估计保险事故的发生概率或保单的续保率时，通常使用 Logistic 回归模型，即假设因变量服从二项分布，使用 Logit 连接函数。

## 10. 2 经验费率定价

在费率厘定中，精算师通常需要根据被保险人的历史损失数据预测其未来的保险成本，而损失数据又来源于随机发生的保险事故，因此应用历史损失的平均值估计被保险人未来的保险成本，未必就可以得到一个准确的估计值。事实上，用个体风险的历史平均值估计其保险成本的准确性如何，与损失数据中的随机波动有很大关系。受到随机波动高度干扰的历史损失数据，其本身就不宜用于厘定保险费率。如果保单持有人的索赔经验持续地好于他所属风险类别的手册费率（manual rate），则他可以要求降低其续期保费。原因在于手册费率基于风险类别的期望损失，而风险类别未必是同质的。

**例：**保单组合的损失经验表明，平均每份保单的索赔频率为每年0.2次。假设有一份保单在过去的2年发生了1次保险事故，即其经验索赔频率为0.5。那么如何估计该被保险人在未来的索赔频率？

1. 0.2
2. 0.5
3. 其他

如果没有被保险人的任何信息，则对其索赔频率的估计只能是0.2。

已知保单的经验索赔频率为0.5，这就表明0.2可能低估了该保单的索赔频率。如果直接用0.5估计该保单在未来的索赔频率，也有不妥之处：一个真实索赔频率很低的被保险人也会发生保险事故；一个真实索赔频率较高的被保险人也可能在一定时期内不会发生任何保险事故。因此，对上述保单索赔频率的最好估计值应该在0.2和0.5之间，即它们的某种加权平均。

在预测过程中如何确定该权数是一个重要的问题。根据个体风险的索赔经验调整其费率的定价方法被称之为经验费率厘定，运用最为广泛的是信度模型。信度模型解决了如何确定权数的问题，其中权数被称之为信度因子。因此，信度模型是是非寿险精算学中最主要的成果。

信度模型可以表示为：



其中，是信度因子。信度补项（complement of credibility) 指的是通常是个体风险所属的风险集合的平均费率

本节将主要介绍信度因子的计算方法，即最精确信度模型，也被称作最小二乘信度模型，主要包括 Bühlmann 信度模型和Bühlmann-Straub 信度模型。

### 10. 2.1 Bühlmann信度模型

保单持有人在过去年的索赔经验：，手册费率为。索赔经验表明，如果保单持有人过去年的历史平均损失与手册费率不相同，那么表明用手册费率进行定价将不太适合。

为了预测个体风险（个体保单）在第年的损失，存在有下述假设

1. 个体风险的风险水平用风险参数表示，其中风险参数是随机变量，表示个体风险之间的差异。
2. 由于不同个体风险的风险是不同的，且进一步假设参数服从密度函数。
3. 尽管个体风险的 值是未知的，但假设是已知的，用来描述风险的随机分布情况。

**Bühlmann模型：**在给定的条件下，是独立同分布的随机变量，具有相同的均值和方差：





其中，是假设均值(hypothetical mean)，是过程方差(process variance)。该假设表明对于给定的个体风险，其风险规模不随时间变化，损失的均值和方差不随时间而变化（在上式中表现为假设均值和过程方差与无关）。

个体风险（个体保单）在第年的损失预测值表示为，即是给定个体风险特征条件下未来的期望损失。但是由于保单个体风险特征是未知的，条件期望也是随机变量。为了获得个体风险在第年的损失预测值，Bühlmann模型对个体风险的条件期望进行了近似，得到了最优线性估计值。因此，在已知个体保单的历史索赔记录的情况下，个体风险在第年的预测值表示为：



其中，表示个体保单的历史平均损失，表示手册保费，即整个保单组合的平均损失。为Bühlmann模型中信度因子，基本公式为：





其中，

：假设均值的期望值（手册保费/集体保费）

：过程方差的均值（组内方差）

：假设均值的方差（组间方差）

在Bühlmann模型中信度因子中，为个体风险的规模（风险单位数），表示个体风险自身的变异性（过程方差的均值），表示个体风险之间的变异性（假设均值的方差）。关于信度因子的直观解释可以理解为：

（1）度量的是个体风险之间的变异性，即描述的是组间差异。个体风险之间的变异性越大，个体风险的经验数据的可信度越高。信度因子越大，第年的损失预测值更加依赖于历史经验信息。

（2）度量的是个体风险自身的变异性，即描述的是组内差异。个体风险自身的变异性越大，其经验数据的可信度越低。第年的损失预测值更加依赖于整个保单组合的平均损失（手册保费）。

（3）度量的是个体风险自身的变异性和个体风险之间的变异性的相对水平。相对变异性越低，信度因子越小。

**例：**设个体风险的索赔次数是独立同分布的泊松随机变量，泊松分布的参数为，而参数又是一个Gamma分布，比率参数和形状参数为和，求个体风险的信度保费（假设索赔强度为1）。

**解：**由于服从泊松分布，因此，对于给定的个体风险，





因此，



为过程方差的均值

为假设均值的方差

于是，



因此Bühlmann信度保费为



### 10. 2.2 Bühlmann-Straub信度模型

在实际运用过程中，Bühlmann 模型存在的问题的没有考虑个体风险的规模在各年可能发生的变化，即假设随机变量的条件方差不随着风险规模变化而变化。但实际上，个体风险的规模

是可能发生变化的，譬如，一个车队的车辆数、一个团体的工资总额和雇员人数等在各年都有可能发生变化。Bühlmann-Straub 模型是对 Bühlmann 模型的扩展，假设个体风险规模是可以变化的。因此，本节用表示个体风险平均每个风险单位的损失观测值。

**假设：**给定，平均每个风险单位的损失相互独立，具有相同的条件均值（即平均每个风险单位的纯保费相同）：



但条件方差不相同，与风险单位数成反比：



这就表明，个体风险的规模（风险单位数）越大，其过程方差将越小。这个假设从直观上看是合理的，因为个体风险的规模越大，平均每个风险单位的损失越稳定。与Bühlmann模型相同，Bühlmann-Straub模型还需要定义下列符号：

表示假设均值的期望值（集体保费）

表示过程方差的均值（组内方差）

表示假设均值的方差（组间方差）

运用Bühlmann-Straub模型可以得到个体风险在第年的信度保费估计值：



其中，表示过去年每个风险单位的平均损失，信度因子表示为





不难看出，当每年的风险单位数均为时， ，Bühlmann-Straub信度模型就退化为了Bühlmann信度模型。另外，如果个体风险在下年的规模（风险单位数）为，则其Bühlmann-Straub信度保费应为



## 课后习题：

1、证明正态分布属于指数分布族。





正态分布可以表示为指数分布族的形式，其中



2、证明二项分布属于指数分布族。



可表示为指数分布族的形式：



式中，



二项分布的均值为，方差为

3、若为独立同分布的随机变量，对于所有的满足



请问该模型是否为广义线性模型？并说明原因

答案：否，不满足线性预测项的条件

4、解释分类费率厘定和经验费率厘定的主要区别。

答案：分类费率厘定是根据保单已知的风险特征信息进行风险类别划分，从而计算得到每个风险类别的平均费率。目前，分类费率厘定通常使用的是广义线性模型。经验费率厘定是根据被保险人的历史索赔数据预测未来保险成本或者对保单的预期保费进行调整，其中最为重要的模型是1978年Bühmann提出的信度模型，它是现代非寿险精算学的基础。

5、简述Bühlmann模型和Bühlmann-Straub模型的主要区别。

答案：Bühlmann模型是Bühlmann-Straub模型的特例。Bühlmann-Straub模型考虑了个体风险规模的影响，主要体现在个体风险的规模（风险单位数）越大，其过程方差将越小。这个假设从直观上看是合理的，因为个体风险的规模越大，平均每个风险单位的损失越稳定。